СЕКЦИЯ: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

МАТЕМАТИКОВЕДЕНИЕ В ШИРОКОМ И УЗКОМ СМЫСЛЕ СЛОВА. [1]

А. А. Артемов, Н. Б. Волотова, С. В. Кольцова, Л. М. Молчанова

Невозможно отрицать глубокое значение,
какое имеют точно поставленные проблемы
для продвижения математической науки.
Д. Гильберт

Идея выделить новую область исследований, которую мы назвали математиковедением, витает в воздухе. Важно, чтобы ее подхватили и развивали прежде всего математики, а не чиновники, педагоги или методисты. С формальной стороны эта идея навеяна аналогией между искусствоведением и науковедением. С искусствоведением тесно связаны музыковедение, театроведение, киноведение и т.д. Науковедение сформировалось значительно позже и пока еще в нем не выделены специальные области исследований, хотя в наши дни необходимость отдельного направления, объединяющего усилия математиков, философов, историков, методологов, популяризаторов и дидактов математики, ощущают многие.

Математиковедение мы понимаем в широком и узком смысле слова.

Математиковедение в широком смысле – это сплав математики, философии, истории и методологии математики, популяризации и математического образования. Вот некоторые проблемы, для решения которых требуются коллективные усилия специалистов.

Проблема 1. Чему и зачем учить? (Ответ на вопрос "как учить?"– прерогатива методистов).

Вот что пишет по этому поводу В.М. Тихомиров [1]. "У человечества еще не было времени, чтобы в деталях продумать многие наиважнейшие жизненные проблемы. В частности не пришли к полной ясности по вопросу о том, чему учить... Математике учить нужно, по меньшей мере, по двум причинам – для тренировки ума и для того, чтобы можно было понимать, как устроен мир".

[1]Работа поддержана грантами: РФФИ 06-06-96318р-центр-а, РФФИ № 05-01-00074а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы"РНП.2.1.1.351 и Темпланом № 1.2.02.

Указанная проблема тесно связана с математическим и естественнонаучным образованием.

"Вопрос о целях и задачах образования считался жизненно важным для общества со времен Платона и Протагора. В наши дни на вопрос "чему и зачем учить" имеются поверхностные ответы, отсылающие к государственным стандартам. Авторы стандартов – специалисты-предметники, далекие от философии науки, не Протагоры и не Сократы. В то же время философы-математики, как правило, недостаточно знают предмет, о котором философствуют. Поэтому и те, и другие считают смыслом математики ее полезность для успешной общественно-производственной деятельности...

Математическое знание (как считал Платон) позволяет видеть мир идей, сущностный смысл предметного знания, а это самое важное для человека" [2].

Проблема 2. Что такое математика?

До сих пор нет четкого ответа на вопрос, что такое математика, ни у философов, ни у историков математики, ни у самих математиков.

Узкому специалисту-математику нет необходимости понимать, что означает слово "математика". А ведь вопрос "Что такое математика?" совсем не праздный, более того, он имеет отношение к общекультурному смыслу науки, к тому, что в ней есть такого, что было бы необходимо изучать каждому и почему. Не определено само место математики в системе наук. Деление на естественные, гуманитарные и технические науки не оставляет места математике. Поэтому некоторые классификаторы содержат такой раздел, как "точные и естественные науки" или "математика и естественные науки".

У ряда ученых и общества в целом вообще нет представления о современной математике, путях ее развития и месте в системе научного знания и культуры человечества.

Проблема 3. Постоянно увеличивающийся разрыв между современными математическими исследованиями и классическим образованием в университете.

Области математических исследований постоянно растут, а объем общематематического образования на протяжении полувека практически не изменился. Об этом, в частности, говорит В.А. Садовничий, предлагая на 1–1,5 года продлить общематематическое образование до разделения студентов по кафедрам. Отмеченный разрыв приводит к тому, что в аспирантуре приходится тратить много времени на повышение математического уровня, а в итоге сроки написания диссертации удлиняются. Более того, все важное и ценное, полученное современными исследователями и носящее общематематический характер, не внедряется в процесс обучения. Нет людей, которые целенаправленно этим бы занимались. Даже если это и делается, то оно не известно широкой аудитории преподавателей математики университетов.

Проблема 4. Разработка критериев оценки математической работы.

Несомненно, очень важны осмысление нового и оценка его значимости.

П.С. Александров [3] поднимал вопрос о критериях, позволяющих отличить хорошие, ценные математические работы от малоинтересной математической продукции, в таком обилии наполняющей и переполняющей математические журналы. Он считал, что все, что предлагается в качестве критериев, на самом деле является достаточными, но не необходимыми условиями. К ним он относил:

- практическое использование результатов работы,
- трудность получения результата (напоминает установление рекорда в спорте),
- простые, но основополагающие понятия и методы.

В последнее время основными критериями оценки эффективности научно-исследовательской деятельности ученого являются количество публикаций и индекс цитирования. Приведем яркий пример, когда оба эти критерия не срабатывают. "За 31 год творчества Ф. Броудер опубликовал 203 статьи, при этом как математик он никому в мире практически не известен. В то же время всемирно известный Курт Гедель, о котором знает любой студент-математик, за 28 лет научной деятельности опубликовал всего 4 статьи". Но зато какие! Более того, результаты Геделя можно назвать отрицательными результатами в математике. Он доказал, что любая возможная система аксиом арифметики не полна, откуда следует, что идея Гильберта о выводе всей математики логическим путем из конечного списка аксиом не верна в принципе. Обычно цитируются источники положительного знания, опираясь на которые наука идет дальше. Отрицательный результат Геделя служит маяком, свет которого указывает потоку математических исследований, что в этом направлении идти не надо – тут мель, тупик.

Использование указанных выше оценочных критериев приводит к тому, что в современной математике возникла тенденция писать научные статьи ради их написания [3]. Это тесно связано с внешним давлением, жестким планированием результатов научной работы. У Геделя был бы весьма низкий рейтинг по оценкам, использующим эти критерии. Кому как не математиковедам, надлежит заняться разработкой глубоких критериев, заменив ими используемые сейчас.

Проблема 5. Что считать результатом, достойным кандидатской диссертации по математике?

Вопрос спорный. Мы предлагаем свое видение проблемы. Какие вообще бывают результаты в математике? Во-первых, это революционные идеи, приводящие к переворотам в науке, они появляются очень редко, например, метод координат, дифференциальное и интегральное исчисления, теория множеств и т.д. Обычно из таких идей развиваются новые области математики. Во-вторых, бывают выдающиеся результаты, которые приводят авторов к известности в мире математиков. В-третьих, открываются новые направления в той или иной области и т.д. Все это – заслуги выдающихся математиков-первооткрывателей, аналогов выдающихся музыкантов-композиторов. Но не все музыканты – великие и не все из них композиторы.

Степень кандидата наук по смыслу (и по статусу) должна присуждаться тому, кто доказал, что он может заниматься наукой. В советской математике сложилось (а в российской сохраняется) такое положение, что для кандидатской диссертации требуется получение значительных результатов, тем самым кандидатская превращается в некоторое подобие докторской. Высокая требовательность к работам, с одной стороны, это – похвальное качество, а с другой, приводит к отрицательным житейским последствиям. Например, больной вопрос для математических кафедр университетов (особенно периферийных) – это низкий процент остепененности преподавателей. На наш взгляд, надо более реалистично относиться к аспирантам-математикам, ставить перед ними посильные задачи, чтобы не воспитывать у них комплекс неполноценности. Иначе получается как в анекдоте: "Вопрос: почему кандидатские диссертации чаще бывают лучше докторских? Ответ: потому что докторские пишут кандидаты, а кандидатские – доктора наук". Мы считаем, что давно настало время обсудить сложившуюся ситуацию.

Проблема 6. Разобщенность математиков.

Эта проблема беспокоит не только математиков. "Лучшие интеллектуальные силы изначально ориентируются на специальные сферы общественного бытия, быстро утрачивая способность, а, главное, потребность в осмыслении общего и целого. Это – весьма характерная особенность современной цивилизации. Люди погружаются в миры внутренних задач, порожденных и осмысленных внутри наук. Специализация происходит иной раз так быстро, что еще недавно учившиеся вместе люди и понимавшие друг друга с полуслова, овладевая специальными языками, перестают совершенно понимать друг друга. При таком положении вещей ни о каких общих ориентирах в науке не может быть и речи" [2].

К математике все сказанное относится в наивысшей степени. Царица наук в наше время представляется необъятным хаосом, постоянно расширяющим свои границы и уже не подвластным для охвата одним умом, каким бы великим он ни был.

На протяжении десятков лет математики мирятся с невозможностью понимать большинство чужих результатов, публикуемых в научных математических журналах. За деревьями формул не видно леса. Краткие аннотации мало что дают. Общепринятый заформализованный характер изложения статьи резко контрастирует с живой математической мыслью. Это не только наше мнение. Борьба с разобщенностью математиков не нова. Не будем перечислять великих, кто это делал. В наше время в Независимом московском университете работает общематематический семинар "Глобус", который основной своей целью ставит (зная, что она в принципе недостижима) сделать математику единой. Вопрос, что они под этим единством понимают.

"Прогресс в жизни и науке осуществляется соединением первопроходцев и размеренным движением вперед всей нашей цивилизации. Это движение со временем делает общедоступными те цели, к которым ценою жертв и страданий раньше пробирались лишь герои" [1].

Представим современную математику в виде детского рисунка солнышка – круга, от которого во все стороны идут лучи, – различные области математических исследований. При этом разные математики видят это "солнышко" по-разному. Кто-то видит центр и только свой луч, выдающиеся видят несколько лучей и связи между ними. Участники "Глобуса", относящиеся к последним, пытаются соединить концы лучей. В предисловии ко второму выпуску докладов семинара М. Цфасман пишет: "Блажен, кто все это поймет!".

Мы, рядовые математики провинциального университета, бесконечно преданные и любящие свою науку, отважились включиться в эту безнадежную борьбу за преодоление разобщенности математиков.

Что движет нами, когда мы ввязываемся в безнадежное дело? Ответ – внутреннее осознание серьезнейшей проблемы неравнодушными людьми, к которым мы себя относим. Приведем эпиграф из первого выпуска докладов семинара "Глобус":

> Мужайтесь, о други! Боритесь прилежно,
> Хоть бой и неравен, борьба безнадежна.
>
> Ф.И. Тютчев

Именно выделение проблемы разобщенности математиков привело нас к понятию математиковедения в узком смысле. В нашем понимании математиковед должен пытаться интегрировать математические исследования.

"В науке человек должен тренировать себя для того, чтобы, даже не располагая особыми средствами, сделать попытку в одиночку взобраться на неприступную вершину. Но нужно также участвовать в коллективном труде, обеспечивающем размеренное движение цивилизации по прокладыванию дорог и коммуникаций к этим вершинам" [1].

Этот коллективный труд и есть труд математиковедов!

Математиковед должен прослеживать развитие математической идеи от ее зарождения до современного состояния. Этого не делают историки математики. У них существует запрет писать не только об исследованиях ныне здравствующих математиков, но даже о трудах тех, кого уже нет с нами, но еще живы их ученики, считая, что в противном случае исследования могут быть не объективными. Перед математиковедом стоит другая задача, акцент перенесен с имен авторов на саму математику, которая является коллективным трудом многих поколений и которой безразлично, что общую формулу Стокса

$$\int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{S} d\omega$$

впервые доказал вовсе не Стокс. В то же время факт, что эта теорема вбирает в себя как частные случаи формулу Ньютона-Лейбница, формулу Грина на плоскости, формулу Стокса в 3-мерном пространстве, формулу Гаусса-Остроградского, важен для математиковеда, т.к. показывает, как развивается математическая идея. Или, например, теорема Пифагора – вершина человеческой мысли в античные времена – сейчас стала теоремой, хорошо известной каждому школьнику. Математикам стало очевидно, что теорема о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда, или теорема о том, что квадрат объема k-мерного параллелепипеда в n-мерном пространстве равен сумме квадратов его ортогональных проекций на k-мерные плоскости n-мерной системы координат, или теорема о том, что в линейном нормированном пространстве квадрат нормы вектора равен сумме квадратов норм его проекций на два ортогональных подпространства, прямой суммой которых является само пространство, являются обобщениями теоремы Пифагора. А равенство Парсеваля и теорема Планшереля! Это тоже обобщения теоремы Пифагора. Ее обобщения имеются и в неевклидовых пространствах.

Мощным приемом для установления связей между различными областями математики является спуск к истокам, к элементарным идеям. Опыт осмысления очень простых математических сущностей организует мысль. Мысленный прыжок от сложного к простому приводит к свежим, еще не ставшими общим местом идеям, вырабатывается математическая интуиция, появляется общий взгляд на вещи, формируются понятия, общие для различных областей математики, например, топологическое пространство, матроид.

Эти навыки нужны для того, чтобы строить самостоятельные мысленные конструкции, позволяющие осмысливать значительно более сложные обстоятельства. "Способность видеть задачу конкретно, а не абстрактно, иметь внутреннюю потребность любые абстракции наполнять конкретным смыслом – совершенно необходимо для осмысления любых проблем. К сожалению, в наше время почти нет людей, способных самостоятельно шевелить мозгами, мы чаще говорим о заимствовании чьего-то якобы эффективного опыта" [2].

Обычно прародителями той или иной теории являются простые идеи. При этом не всегда эта теория возникает в своем простейшем виде. Пример – интегральная геометрия в смысле Гельфанда. Возникнув из известной задачи Радона о восстановлении функции через ее интегралы по прямым, она стала, как обычно, развиваться по восходящей при помощи переноса на все более общие пространства. В соответствии с идеологией математиковедения мы решили посмотреть задачи интегральной геометрии на конечных множествах. Такой подход свободен от аналитических трудностей и позволяет рассматривать идею в чистом виде. На этом пути мы получили определенные результаты. Во-первых, используя комбинаторное преобразование Радона, мы выделили новый класс матроидов, связанных с графами и не являющихся ни циклическими, ни коцикличискими, во-вторых, мы установили связи преобразования Радона с теорией ассоциативных схем (со схемами Джонсона, а, значит, и с теорией кодирования), а также с теорией комбинаторной оптимизации (жадный алгоритм правильно работает на матроидах) [4], [5], [6].

На Международной конференции "Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики" (Тамбов, сентябрь 2006 г.) наш доклад "О роли математиковедения в науке и образовании"вызвал оживленные дискуссии. В частности, один из участников сказал, что теперь он знает, как называется его область исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. М. Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка "Квант", вып. 56, М.: Наука, 1986.

2. *С. Г. Шеховцов.* Материалы XI Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем", Нижний Новгород, 20–25 ноября 2000, М.: Изд-во центра прикл. иссл. при мехмате МГУ, 2000. Часть II, 239–253.

3. *П. С. Александров.* Несколько слов из воспоминаний о Гильберте. Успехи матем. наук, 1981, том 36, вып. 1, 233–234.

4. *С. В. Кольцова, С. В. Поленкова.* Комбинаторное преобразование Радона и ассоциативные схемы Джонсона. Труды междунар. конф. "Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики", Тамбов, 11–15 сентября 2006, 263–272.

5. *S. V. Koltsova, V. F. Molchanov.* Radon transform on graphs and admissible complexes. Proceedings of the conference "Harmonic analysis on homogeneous spaces, representations of Lie groups and quantization", Tambov, April 25–29, 2005, Вестник Тамбовского унив., 2006, том 11, вып. 1, 41–48.

6. *А. А. Артемов, Н. Б. Волотова, С. В. Кольцова.* Математиковедение как область науковедения. Матер. IV Междунар. конф. "Проблемы истории физико-математических наук". Тамбов, июнь 2004, 183–189.